

2025058-专业技术岗01-数学试讲教材-01



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

微积分

第四版 上册

同济大学数学科学学院 编

高等教育出版社

第五节 极限存在准则与两个重要极限

本节介绍极限存在的两个准则及由这些准则而推得的两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

一、夹逼准则

关于函数收敛的夹逼准则: 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足

(1) 当 $x \in \dot{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时, 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A,$

则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在且等于 A .

关于数列收敛的夹逼准则: 设数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足

(1) $y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, \dots);$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且等于 a .

夹逼准则的几何直观是明显的. 以 $x \rightarrow x_0$ 的函数极限为例, 在图 1-11 中可以看到, 由于当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 和 $h(x)$ 都趋于常数 A , 故夹在中间的函数 $f(x)$ 也必定趋于 A .

下面仅对 $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限来证明夹逼准则.

按定义, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 故

存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|g(x) - A| < \varepsilon$, 就有

$$- \varepsilon < g(x) - A.$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 故存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有

$|h(x) - A| < \varepsilon$, 就有

$$h(x) - A < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, 则当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, 不等式 $- \varepsilon < g(x) - A, h(x) - A < \varepsilon$ 同时成立, 并注意到条件

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

就得

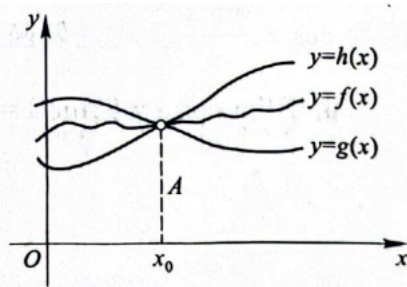


图 1-11

$$-\varepsilon < g(x) - A \leq f(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon,$$

即

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

从而证明了

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

由夹逼准则, 我们可以证明下列重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

先给出一个基本不等式:

$$\sin x < x < \tan x \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

这个不等式产生于如下的几何事实: 在单位圆(图 1-12)中, 设圆心角 $\angle AOB = x$, x 取弧度 $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, 因为

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<$ $\triangle AOD$ 的面积,

故得

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

对此不等式的每项取倒数, 并乘 $\sin x$, 就得不等式

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad (2)$$

因为 $\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$ 均是偶函数, 故不等式(2)在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内也成立.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 故由不等式(2)及夹逼准则, 就推得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的图形如图 1-13 所示.

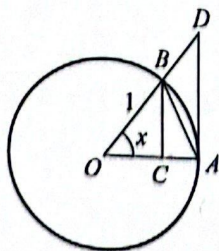


图 1-12

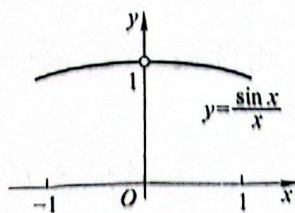


图 1-13

典型例题
夹逼准则

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $u = \arcsin x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $u \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

用夹逼准则可以证明下面这个有意思的数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (3)$$

因为当 $n > 1$ 时, $n^{\frac{1}{n}} > 1$, 可令 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$ ($a_n > 0$). 于是 $n = (1 + a_n)^n$. 按牛顿二项式公式

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

可见

$$a_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1},$$

即

$$0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, 根据夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1.$$

数列 $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 的图形如图 1-14 所示.

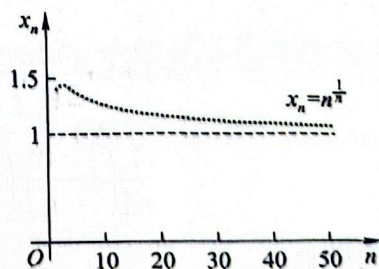


图 1-14



典型例题
重要极限1

二、单调有界收敛准则

如果数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$, 就称它是单调增加(或递增)数列; 如果满足 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$, 就称它是单调减少(或递减)数列, 单调增加数列和单调减少数列统称为单调数列 (monotone sequence) ①.

第二节曾指出, 有界数列未必收敛, 但是, 如果数列不仅有界, 而且是单调的, 那么这个数列必然收敛, 这就是下面的单调有界收敛准则:

若单调增加数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 即存在数 M , 使得

$$x_n \leq M \quad (n=1, 2, \cdots),$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且不大于 M .

若单调减少数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有下界, 即存在数 N , 使得

$$x_n \geq N \quad (n=1, 2, \cdots),$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且不小于 N .

我们指出, 单调有界收敛准则是实数集 \mathbf{R} 的一个重要属性, 这条准则在本书中不加证明, 姑且把它当作公理.

现在我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

先考察 x 取正整数 n 而趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 我们来证 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调增加的有界数列. 按牛顿二项式公式,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \\ &\quad \frac{n(n-1) \cdots (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

同样地,

① 这里的单调数列的单调性是广义的, 就是说, 条件中也包括等号成立的情形, 以后提到单调数列时都是指这种广义的单调数列.



典型例题
单调有界收敛准则

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

可见,除了前两项外, x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项,而且 x_{n+1} 还多了最后的一个正项,因此

$$x_n < x_{n+1} (n=1, 2, \cdots),$$

这说明数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是单调增加的.其次注意到 x_n 展开式中的一般项

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \quad (2 \leq k \leq n),$$

又

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2^1}, \quad \frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k} < \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2}}_{k-1 \text{个}} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (3 \leq k \leq n),$$

于是

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

这说明数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有上界的(图1-15).根据单调有

界收敛准则知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在,通常用字母 e 来

表示这个极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4)

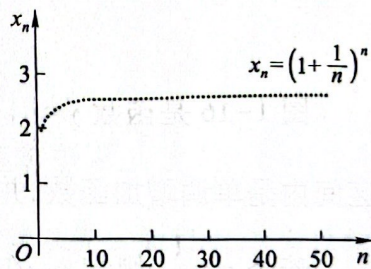


图 1-15

可以证明, e 是一个无理数,它的值是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \cdots.$$

在本书预备知识中讲到的指数函数 $y = e^x$ 和自然对数 $y = \ln x$ 中的底 e 就是这个常

数.下面证明,当 x 取实数而趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时,函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且为 e .

事实上,

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,记 x 的整数部分 $[x] = n$,则当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $n \rightarrow \infty$,并且有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{e}{1} = e,\end{aligned}$$

因此由夹逼准则得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(2) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 令 $x = -(t+1)$, 则 $x \rightarrow -\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right] = e.\end{aligned}$$

综合(1)和(2)的结论, 就得到

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.} \quad (5)$$

图 1-16 是函数 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的图形, 从中可见 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在该区间内是单调增加函数, 并且有水平渐近线 $y = e$.

若令 $x = \frac{1}{u}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow \infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

由此得到重要极限(5)的另一表达形式:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.} \quad (6)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的变化趋势如图 1-17 所示.

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解 令 $x = -t$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $t \rightarrow \infty$, 于是

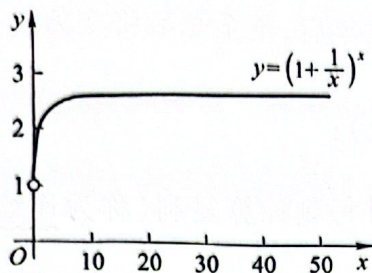


图 1-16

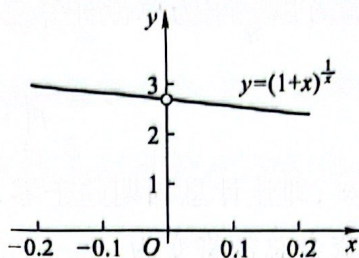


图 1-17

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$$

在求函数极限时,常遇到形如 $[f(x)]^{g(x)}$ 的函数(通常称为幂指函数)的极限.

如果 $\lim f(x) = A > 0, \lim g(x) = B$,那么令

$$u(x) = g(x) \ln f(x),$$

则有 $\lim u(x) = \lim [g(x) \ln f(x)] = B \ln A$,于是 $\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)} = \lim_{u \rightarrow B \ln A} e^u = e^{B \ln A} = A^B$,即有

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = A^B.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解 由于 $(1+x)^{\frac{2}{\sin x}} = \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}}$,于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}},$$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时,底 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e$,指数 $\frac{2x}{\sin x} \rightarrow 2$,故所求极限等于 e^2 .

例 6 设某人以本金 p 元进行一项投资,投资的年利率为 r .如果以年为单位计算复利(即每年计息一次,并把利息加入下年的本金,重复计算),那么 t 年后,资金总额将变为

$$p(1+r)^t (\text{元});$$

而若以月为单位计算复利(即每月计息一次,并把利息加入下月的本金,重复计息),那么 t 年后,资金总额将变为

$$p \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} (\text{元});$$

这样类推,若以天为单位计算复利,那么 t 年后,资金总额将变为

$$p \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t} (\text{元}).$$



典型例题
重要极限2

一般地,若以 $\frac{1}{n}$ 年为单位计算复利,那么 t 年后,资金总额将变为

$$p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \text{ (元);}$$

现在让 $n \rightarrow \infty$,即让计息周期趋于零,亦即每时每刻计算复利(称为连续复利),那么 t 年后的资金总额将变为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = pe^{rt} \text{ (元)}.$$

连续复利是金融学中的一个有用参数,本例说明,它与常数 e 密切相关.



习题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad (\beta \neq 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cot \sqrt{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x};$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2}.$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}.$$

3. 利用夹逼准则证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+a} + \frac{1}{n^2+2a} + \cdots + \frac{1}{n^2+na} \right) = 1 \quad (a \geq 0).$

4. 利用单调有界收敛准则证明下列数列存在极限,并求出极限值:

$$(1) x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \quad (n=1, 2, \cdots);$$

$$(2) x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} \quad (n=1, 2, \cdots).$$