

2025058-专业技术岗01-数学试讲教材 -02



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

微积分

第四版 上册

同济大学数学科学学院 编

高等教育出版社

第二节 求导法则

本节我们将介绍求导数的几个基本法则.借助于这些法则与上节中已经求得的一些简单函数的导数公式,就能够比较方便地求出基本初等函数的导数公式,进而可以求出初等函数的导数.

一、函数的线性组合、积、商的求导法则

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处具有导数 $u'=u'(x)$ 与 $v'=v'(x)$,分别考虑这两个函数的线性组合、积、商在点 x 处的导数.

1. 设 $f(x)=\alpha u(x)+\beta v(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. 由极限运算法则,因

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\alpha u(x+\Delta x)+\beta v(x+\Delta x)]-[\alpha u(x)+\beta v(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha[u(x+\Delta x)-u(x)]+\beta[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
 &= \alpha u'(x) + \beta v'(x).
 \end{aligned}$$

故由导数的定义得知函数 $f(x)$ 在点 x 处也可导, 并且

$$f'(x) = \alpha u'(x) + \beta v'(x),$$

简单地可以表示为

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'.$$

这就是函数的线性组合的求导法则: 两个可导函数的线性组合的导数等于函数的导数的线性组合.

这个法则可以推广到任意有限个函数的情形.

2. 设 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. 由极限运算法则, 有

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)] + [u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
 &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x),
 \end{aligned}$$

其中 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x) = v(x)$ 是由于 $v'(x)$ 存在, 故 $v(x)$ 在点 x 处连续.

以上的推导说明函数 $f(x)$ 在 x 点处也可导, 并且

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

简单地可以表示为

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

这就是函数积的求导法则: 两个可导函数乘积的导数等于第一个因子的导数与第二个因子的乘积加上第一个因子与第二个因子的导数的乘积.

积的求导法则也可以推广到任意有限个函数之积的情形, 例如

$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw',$$

即

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

例 1 设 $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$, 求 y' .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (2x^3 - 5x^2 + 3x - 7)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 3(x)' - (7)' \\
 &= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3.
 \end{aligned}$$

例 2 设 $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2}$, 求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } f'(x) &= \left(x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2} \right)' = (x^3)' + 4(\cos x)' - \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)' \\ &= 3x^2 - 4\sin x,\end{aligned}$$

于是

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4\sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi^2 - 4.$$

例3 设 $y = e^x(\sin x + \cos x)$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x.\end{aligned}$$

3. 设 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$. 我们先考虑 $\frac{1}{v(x)}$ 的导数. 由于 $v'(x)$ 存在, 故 $v(x)$

在点 x 处连续, 并且因为 $v(x) \neq 0$, 所以对于充分小的 $|\Delta x|$, $v(x + \Delta x) \neq 0$. 由极限运算法则, 因

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)} \right] = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2},\end{aligned}$$

故函数 $\frac{1}{v(x)}$ 在点 x 处可导, 且 $\left[\frac{1}{v(x)} \right]' = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$.

又因为 $\frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$, 故利用乘积的求导法则, 得

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \right]' = u'(x) \frac{1}{v(x)} + u(x) \left[\frac{1}{v(x)} \right]' \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2},\end{aligned}$$

简单地可以表示为

$$\boxed{\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

这就是函数商的求导法则: 两个可导函数的商的导数等于分子的导数与分母的乘积减去分母的导数与分子的乘积, 再除以分母的平方.

例4 设 $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$, 求 y' .

解

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x^2+x-2)'(x^3+6)-(x^2+x-2)(x^3+6)'}{(x^3+6)^2} \\
 &= \frac{(2x+1)(x^3+6)-(x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2} \\
 &= \frac{(2x^4+x^3+12x+6)-(3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2} \\
 &= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}.
 \end{aligned}$$

图 2-4 同时显示了 y 与 y' 的图形, 可以看到: 在 y 的变化率大的地方 y' 的绝对值较大, 而 y 的变化率小的地方 y' 的绝对值较小, 接近于 0. 并且可注意到, 在 y 单调增加的区间上, y' 的图形位于 x 轴上方 (即 $y' > 0$); 在 y 单调减少的区间上, y' 的图形位于 x 轴下方 (即 $y' < 0$), 其中的原因将在本章第九节中讨论.

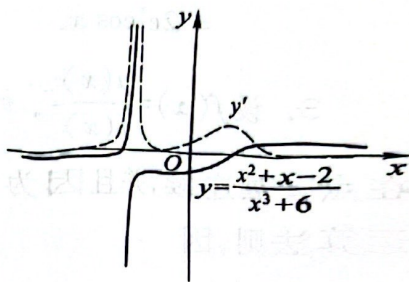


图 2-4

例 5 设 $y = \tan x$, 求 y' .

解 $y' = (\tan x)'$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,
 \end{aligned}$$

即

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

这就是正切函数的导数公式. y 与 y' 的图形如图 2-5 所示.

例 6 设 $y = \sec x$, 求 y' .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{(1)' \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x,
 \end{aligned}$$

即

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x,$$

这就是正割函数的导数公式. y 与 y' 的图形如图 2-6 所示.

用类似的方法, 我们可以求得余切函数与余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x.$$

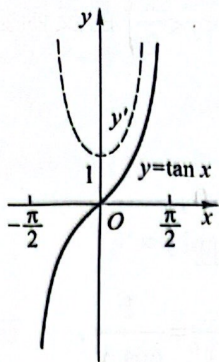


图 2-5

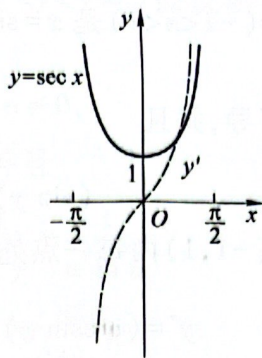


图 2-6

二、反函数的导数

设 $x = \varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、连续, 那么它的反函数, 记为 $y = f(x)$, 在对应的区间 $I_x = \{x \mid x = \varphi(y), y \in I_y\}$ 内也是单调、连续的. 现在进一步假定 $x = \varphi(y)$ 在区间 I_y 内可导, 并且在点 $y \in I_y$ 处, $\varphi'(y) \neq 0$, 我们考虑在对应点 x 处反函数 $y = f(x)$ 的可导性.

给 x 以增量 Δx ($\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x$), 由 $y = f(x)$ 的单调性知

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0,$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

并且因为 $y = f(x)$ 连续, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时必有 $\Delta y \rightarrow 0$, 从而有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

这说明反函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 并且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

由此得到反函数的求导法则: 若函数 $x = \varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调可导, 且导数 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应区间 I_x 内单调可导, 且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

简单地说, 反函数的导数等于直接函数的导数的倒数.

例 7 求反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 $y = \arcsin x$ ($-1 < x < 1$) 是 $x = \sin y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) 的反函数, 而 $x = \sin y$ 在 $I_y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导, 并且

$$(\sin y)' = \cos y > 0,$$

所以, $y = \arcsin x$ 在 $(-1, 1)$ 内每一点处可导, 并且

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

注意到在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, 从而有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

用类似的方法可以求得反余弦函数的导数公式:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 8 求反正切函数 $y = \arctan x$ 的导数.

解 $y = \arctan x$ ($-\infty < x < +\infty$) 是 $x = \tan y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) 的反函数, 而 $x = \tan y$ 在 $I_y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导, 并且

$$(\tan y)' = \sec^2 y > 0,$$

所以, $y = \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内每一点处可导, 并且

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

注意到 $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, 从而有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

用类似的方法可以求得反余切函数的导数公式:

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

如果注意到三角学中的公式:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

我们也可以利用函数的和或差的求导法则, 由反正弦函数和反正切函数的导数求得反余弦函数与反余切函数的导数公式.

例 9 求对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数.

解 $y = \log_a x$ ($0 < x < +\infty$) 是 $x = a^y$ ($-\infty < y < +\infty$) 的反函数, 而 $x = a^y$ 在 $I_y = (-\infty, +\infty)$ 内单调、可导, 并且

$$(a^y)' = a^y \ln a \neq 0,$$

所以, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内每一点处可导, 并且

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}.$$

注意到 $a^y = x$, 从而有

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地, 当 $a = e$ 时, 可以得到自然对数函数的导数公式:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

以上推导出来的基本初等函数的导数公式都在第五节中汇总列出.