



微积分

第四版 上册

同济大学数学科学学院 编

第一节 不定积分的概念及其性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1 如果在区间 I 内,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对任意的 $x \in I$, 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx,$$

那么,函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 内的原函数(primitive function).

例如,因为 $(\sin x)' = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的原函数. 又例如,当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 于是 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数;当 $x < 0$ 时, $(\ln |x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, 于是 $\ln |x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的原函数. 因为当 $x > 0$ 时, $x = |x|$, 因此 $\ln |x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, +\infty)$ 内的原函数的统一表达式.

关于原函数,我们要说明三点:一是原函数的存在性,即具备什么条件的函数必有原函数?二是原函数的个数,即如果某函数有原函数,那么它的原函数有多少?三是原函数之间的关系,即某函数如果有多个原函数,那么这些原函数之间有什么联系?

(1) 我们首先给出原函数的存在条件,它的证明将在第六节中给出:

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续,那么在区间 I 内必定存在可导函数 $F(x)$,使得对每一个 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x),$$

即连续函数必定存在原函数.

我们已经知道初等函数在其定义域内的任一区间内连续,因此每个初等函数在其定义域内的任一区间内都有原函数.

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内有原函数 $F(x)$, 那么对于任意常数 C , 由于对任意的 $x \in I$, 有 $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$, 所以 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在 I 内的原函数. 这说明如果函数 $f(x)$ 在 I 内有原函数, 那么它在 I 内就有无限多个原函数.

(3) 设 $F(x)$ 和 $\Phi(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 内的两个原函数, 那么对任意的 $x \in I$,

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

由于导数恒为零的函数必为常数, 因而 $\Phi(x) - F(x) = C_0$, 所以 $\Phi(x) = F(x) + C_0$.

(C_0 是某个常数). 这说明 $f(x)$ 的任何两个原函数之间只差一个常数.

由此可见, 当 C 是任意常数时, 表达式

$$F(x) + C$$

就可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 从而 $f(x)$ 的全体原函数所组成的集合就是函数族

$$\{F(x) + C \mid -\infty < C < +\infty\}.$$

有了以上的说明, 我们引进下述定义:

定义 2 函数 $f(x)$ 在区间 I 内带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在 I 内的不定积分 (indefinite integral), 记为

$$\int f(x) dx,$$

其中记号 \int 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x) dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

由定义 2 以及前面的说明可见,

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 内的一个原函数, 那么

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

这说明, 要计算函数的不定积分, 只需求出它的一个原函数, 再加上任意常数 C 就可以了.

例 1 求 $\int x^2 dx$.

解 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$, 所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数, 因此

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

例 2 求 $\int \frac{dx}{1+x^2}$.

解 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, 所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数, 因此

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

从不定积分的定义, 我们可以得到下述关系:

由于 $\int f(x) dx$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 所以

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x),$$

又由于 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个原函数, 所以

$$\int f'(x) dx = f(x) + C.$$

由此可见, 如果不计任意常数, 求导运算与求不定积分的运算(简称积分运算)是互逆的.

二、基本积分表

既然积分运算是求导运算的逆运算, 因此从导数公式可以得到相应的积分公式. 例如, 因为 $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$, 所以就有

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本积分公式列成表 3-1, 称为基本积分表.

表 3-1 基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k 是常数, $k=1$ 时, $\int dx = x + C$);	(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$;
(2) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$);	(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;
(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;	(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$;
(4) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;	(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$;
(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;	(12) $\int e^x dx = e^x + C$;
(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;	(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$);
(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;	(14) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$;
	(15) $\int \cosh x dx = \sinh x + C$.

以上十五个基本积分公式是求不定积分的基础, 必须熟记. 下面举几个应用幂函数的基本积分公式(2)的例子.

例 3 求 $\int x^2 \sqrt{x} dx$.

$$\text{解 } \int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C.$$

$$\text{例 4 求 } \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$$

以上两个例子表明,对于被积函数是用根式或分式表示的幂函数的情形,应先把它们化为 x^μ 的形式,然后应用幂函数的基本积分公式(2)来求不定积分.

三、不定积分的性质

根据不定积分的定义,可以推得如下的性质:

性质 1 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均有原函数,则

$$\int [u(x) \pm v(x)] dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx. \quad (1)$$

事实上,对上式的右端求导,并利用求导法则,得

$$\left[\int u(x) dx \pm \int v(x) dx \right]' = \left[\int u(x) dx \right]' \pm \left[\int v(x) dx \right]' = u(x) \pm v(x),$$

这表明(1)式的右端是 $u(x) \pm v(x)$ 的原函数,又(1)式右端有两个积分记号,形式上含两个任意常数,由于两个任意常数之和仍为任意常数,故实际上含一个任意常数,因此(1)式右端是 $u(x) \pm v(x)$ 的不定积分.

容易验证,性质 1 对于有限个函数都是成立的.

类似地可以证明不定积分的性质 2.

性质 2 设 $u(x)$ 有原函数, k 为非零常数,则

$$\int ku(x) dx = k \int u(x) dx. \quad (2)$$

利用基本积分表及以上两个性质,可以求出一些简单函数的不定积分.

$$\text{例 5 求 } \int \frac{(x-1)^3}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{(x-1)^3}{x} dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} dx \\ &= \int \left(x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int x^2 dx - 3 \int x dx + 3 \int dx - \int \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \ln|x| + C.$$

注意,由于求导运算与积分运算互逆,所以,如果对积分的结果求导,导数恰等于被积函数,那么积分的结果是正确的.就例5的结果而言,由于

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \ln|x| + C\right)' = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} = \frac{(x-1)^3}{x},$$

所以结果是正确的.

例6 求 $\int 3^{x+1} e^x dx$.

解 因为 $3^{x+1} e^x = 3 \cdot (3e)^x$, 所以利用(2)式以及把 $3e$ 看作 a 并利用基本积分公式(13), 我们可以得到

$$\int 3^{x+1} e^x dx = 3 \int (3e)^x dx = 3 \cdot \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^{x+1} e^x}{1 + \ln 3} + C.$$

例7 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分,但是我们可以先把被积函数变形并利用不定积分的性质,化为表中所列类型的积分,然后再逐项求积分:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1) + 1}{1+x^2} dx \\ &= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C. \end{aligned}$$

例7的解法是常用的,下面再举几个这样的例子.

例8 求 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x + \sin x) + C. \end{aligned}$$

例9 求 $\int \tan^2 x dx$.

解 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C.$

例 10 求 $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} = 4 \int \csc^2 x dx = -4 \cot x + C.$

习题 3-1

1. 下列各题中哪些函数是同一函数的原函数:

(1) $\frac{1}{2} \sin^2 x, -\frac{1}{4} \cos 2x, -\frac{1}{4} \cos^2 x;$

(2) $\ln x, \ln 2x, \ln |x|, \ln x + C.$

2. 求下列不定积分:

(1) $\int 5x^2 dx;$

(2) $\int x\sqrt{x} dx;$

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}};$

(4) $\int \sqrt[n]{x^n} dx;$

(5) $\int (x^2 + 3x + 4) dx;$

(6) $\int \frac{(x+3)^3}{x^2} dx;$

(7) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$

(8) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数});$

(9) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx;$

(10) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx;$

(11) $\int a^x e^x dx \quad (a > 0, a \neq \frac{1}{e});$

(12) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$

(13) $\int \sec x (\sec x - \tan x) dx;$

(14) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

(15) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x};$

(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$

(17) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

(18) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx;$

(19) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)};$

(20) $\int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx.$